

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2025/26 учебного года для 10 класса

Задача 1

В-1 Число p таково, что уравнение

$$x^3 + px = 4$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наибольшее возможное значение суммы кубов этих корней.

Ответ: 12

Решение. Обозначим корни уравнения через a, b и c . По теореме Виета для кубического уравнения:

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = p, \quad abc = 4.$$

Теперь по формуле

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

получаем

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0^3 - 3(-c)(-a)(-b) = 3abc = 12$$

Значит, искомая сумма от p не зависит и равна константе (если только имеется три корня).

Еще проще сразу заметить, что так как число a является корнем уравнения, то $a^3 = -pa + 4$. Аналогично $b^3 = -bp + 4$, $c^3 = -pc + 4$. Поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 = -p(a + b + c) + 3 \cdot 4 = -p \cdot 0 + 12 = 12.$$

В-2 Число p таково, что уравнение

$$x^3 - px = 6$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наименьшее возможное значение суммы кубов этих корней.

Ответ: 18

В-3 Число p таково, что уравнение

$$x^3 + 5 = px$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наибольшее возможное значение суммы кубов этих корней.

Ответ: -15

В-4 Число p таково, что уравнение

$$x^3 - 7 = px$$

имеет три различных действительных корня. Найдите наименьшее возможное значение суммы кубов этих корней.

Ответ: 21

Задача 2

В-1 Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{6y - 3x} + \sqrt[4]{2x + 4y + 15} + \sqrt[6]{5x - 2y - 1}$$

Ответ: 2

Решение. Пусть $a^2 = 6y - 3x \geq 0, b^6 = 5x - 2y - 1 \geq 0, a, b \geq 0$.

Тогда $f(x, y) = h(a, b) = a + b + \sqrt[4]{a^2 + b^6 + 16} \geq 2$ и $h(a, b) = 2$ при $a, b = 0$.

Так как при любых a, b система

$$\begin{cases} 6y - 3x = a^2, \\ 5x - 2y - 1 = b^6 \end{cases}$$

имеет (единственное) решение, $\min f(x, y) = 2$.

В-2 Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{7y - 5x} + \sqrt[4]{2x + 3y + 8} + \sqrt[6]{7x - 4y - 8}$$

Ответ: 2

В-3 Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{8y - 2x} + \sqrt[6]{3x + 4y + 63} + \sqrt[10]{5x - 4y - 1}$$

Ответ: 2

В-4 Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{7y - 3x + 10} + \sqrt[8]{2x + 4y + 1} + \sqrt[6]{5x - 3y - 10}$$

Ответ: 1

В-5 Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \sqrt{6y - 3x - 3} + \sqrt{2x + 4y + 9} + \sqrt[6]{5x - 2y + 3}$$

Ответ: 3

Задача 3

В-1 Сумма слагаемых в выражении $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99$ положительна. Андрей нашёл такое наименьшее N , при котором замена N знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом N ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

Ответ: -338

Решение. Сумма всех нечётных чисел от 1 до 99 равна

$$\frac{1 + 99}{2} \cdot 50 = 2500.$$

Нам нужно так изменить знаки, чтобы было: $A + B = 2500, A - B < 0$ (здесь A – сумма всех слагаемых с плюсом, B – сумма модулей всех слагаемых с минусом). Значит, $A \in [1, 1249], B = 2500 - A \in [1251, 2499]$.

Если мы хотим минимизировать количество замен знаков, чтобы число стало отрицательным, нам нужно заменить знаки, соответствующие наибольшим по модулю значениям. Это приведёт к неравенству:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) - (2n + 1) - (2n + 3) - \dots - 97 - 99 < 0.$$

Иными словами, $A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) \leq 1249$. Отсюда $n^2 \leq 1249, n \leq 35$. Это означает, что количество чисел с «минусом» не меньше 15, и минимальное значение есть $N = 15$.

Тогда получается $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 69 = 1225, A - B = -50$.

Но при $N = 15$ возможны и другие значения отрицательной суммы. Нас интересуют все возможные суммы 15 различных нечётных чисел от 1 до 99, превышающие 1250. Любая сумма 15 нечётных чисел нечётна. Минимальная такая сумма равна сумме 15 наименьших нечётных $1 + 3 + 5 + \dots + 29 = 15^2 = 225$, максимальная — $99 + 97 + \dots + 71 = \frac{99+71}{2} \cdot 15 = 1275$. Таким образом, B может принимать все нечётные значения между 225 и 1275. В промежутке $[1251, 1275]$ находятся

$$B \in \{1251, 1253, 1255, \dots, 1275\}.$$

Тогда $A = 2500 - B$, $A - B = 2500 - 2B$, то есть

$$A - B \in \{-2, -6, -10, -14, -18, -22, -26, -30, -34, -38, -42, -46, -50\}.$$

Получается 13 разных значений с суммой $\frac{-2-50}{2} \cdot 13 = -338$.

В-2 Сумма слагаемых в выражении $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 98 + 100$ положительна. Борис нашёл такое наименьшее N , при котором замена N знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом N ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

Ответ: -128

В-3 Сумма слагаемых в выражении $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 + 101$ положительна. Валентина нашла такое наименьшее N , при котором замена N знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом N ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

Ответ: -15

В-4 Сумма слагаемых в выражении $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 103 + 105$ положительна. Галина нашла такое наименьшее N , при котором замена N знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом N ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

Ответ: -666

Задача 4

В-1 Имеется куб с ребром 4, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 2 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

Ответ: 63

Решение. Пусть сторона куба равна N , а число божьих коровок умножается в K раз. За n шагов в общей сложности прилетает $\frac{K^n - 1}{K - 1}$ коровок (по формуле суммы геометрической прогрессии). На грани куба $(N + 1)^2$ точек, но просто так сложить все грани нельзя, потому что точки на рёбрах относятся сразу к двум граням, а точки на вершинах — к трём. Поэтому считаем вершины, рёбра и грани отдельно. Всего точек на кубе будет $6(N - 1)^2 + 12(N - 1) + 8$. Нужно выбрать наибольшее n , при котором число коровок всё ещё меньше числа точек на кубе. В ответ пойдёт $\frac{K^n - 1}{K - 1}$.

В-2 Имеется куб с ребром 8, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 3 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

В-3 Имеется куб с ребром 5, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 2 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

Ответ: 127

В-4 Имеется куб с ребром 6, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 2 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

Ответ: 127

В-5 Имеется куб с ребром 5, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 3 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

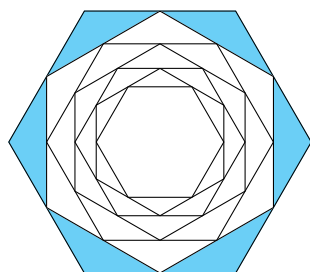
Ответ: 121

В-6 Имеется куб с ребром 6, на поверхности которого отмечены все точки с целочисленными координатами. При этом оси координат параллельны ребрам куба, а координаты вершин — целочисленные. Каждую минуту на куб одновременно садятся божьи коровки, причем каждая из них садится на одну из отмеченных точек. В первую минуту садится одна божья коровка, а в последующие минуты — в 3 раза больше, чем село в предыдущую минуту. А когда места на всех новоприбывших уже не хватает, то ни одна из них не сядет. Сколько божьих коровок сядет на куб?

Ответ: 121

Задача 5

В-1



Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $1 : 1$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 6 раз.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 729?

Ответ: 1024

Решение. Нужно понять, во сколько раз уменьшается шестиугольник с каждой операцией. Пусть сторона исходного шестиугольника равна a . Посмотрим на синий треугольник — к

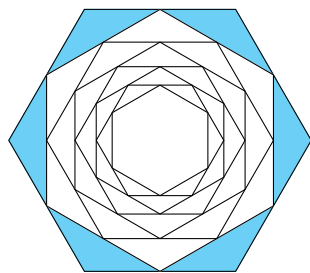
углу в 120° градусов примыкают стороны длиной $ka, (1-k)a$ (где a — сторона изначального шестиугольника, k — дробное выражение пропорции). По теореме косинусов сторона нового шестиугольника будет равна

$$b = a\sqrt{k^2 + (1-k)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k(1-k)} = a\sqrt{k^2 - k + 1}.$$

Каждый новый шестиугольник уменьшается в $\sqrt{k^2 - k + 1}$ раз, а площадь, соответственно, уменьшается в $q = k^2 - k + 1$ раз.

Тогда, если принять площадь изначального шестиугольника за S , площадь синей области будет равна $(1-q)S$, а площадь последнего вписанного равна $q^n S$. Нам известна его площадь (равная $q^n S$), значит, ответ получится умножением этой площади на $\frac{1-q}{q^n}$.

В-2

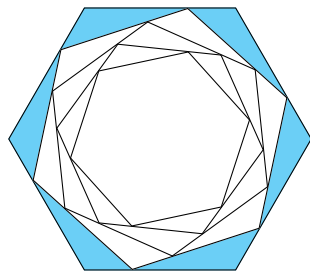


Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $1 : 1$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 7 раз.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 2187?

Ответ: 4096

В-3

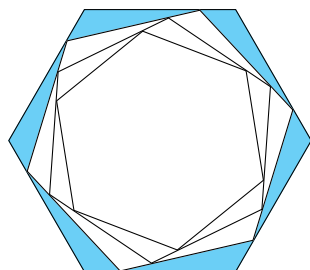


Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $1 : 2$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 4 раза.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 2401?

Ответ: 1458

В-4

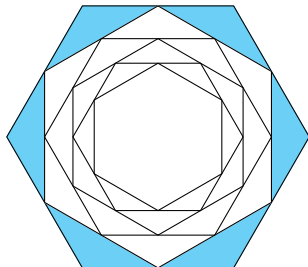


Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $1 : 3$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 3 раза.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 2197?

Ответ: 768

В-5

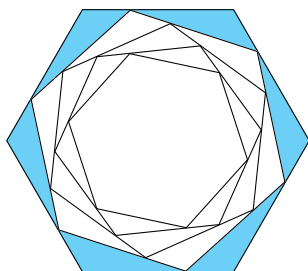


Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $1 : 1$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 5 раз.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 243?

Ответ: 256

В-6



Есть правильный шестиугольник. Вписываем в него новый правильный шестиугольник так, чтобы его вершины делили стороны старого в пропорции $2 : 1$. С новым шестиугольником проделываем то же самое, а потом повторяем ещё и ещё, пока операция не будет проведена 4 раза.

Какая будет площадь голубой области (промежуток между изначальным и первым вписанным шестиугольником), если площадь последнего вписанного шестиугольника равна 2401?

Ответ: 1458

Задача 6

В-1 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 300 на 150 прямоугольной шваброй размерами 40 на 30. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна 4. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

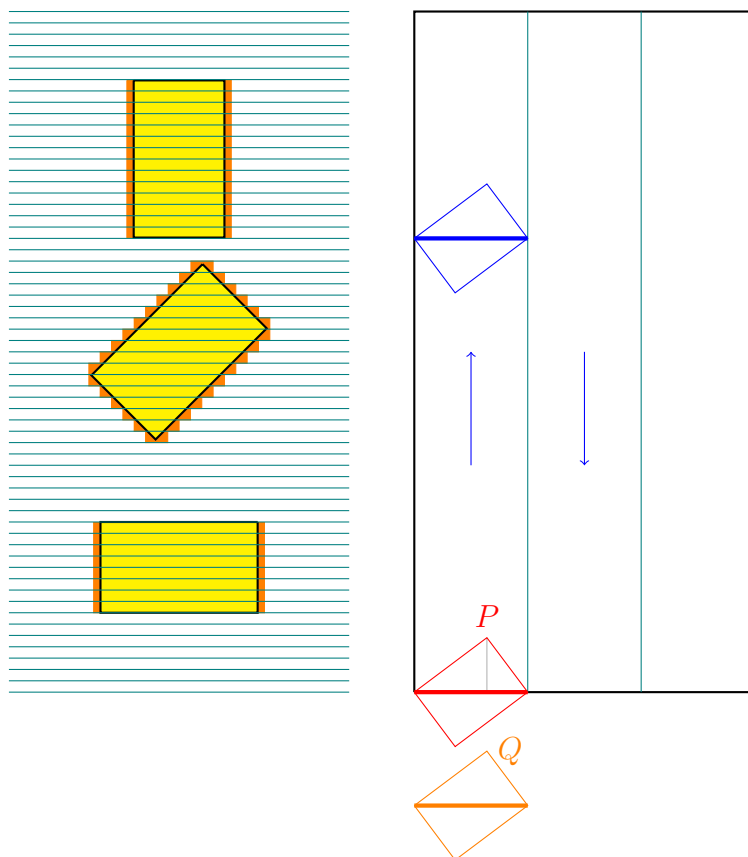
Ответ: 261

Решение.

Пусть A, B — стороны ковра, c, d — стороны швабры, v — её скорость. Пусть $A > B$, $c > d$.

Когда швабра движется, «полезной работой» занято её поперечное направлению движения сечение. Самый длинный отрезок внутри прямоугольника швабры — её диагональ. Значит,

выгоднее всего двигать швабру перпендикулярно направлению её диагонали. Если швабра движется по криволинейной траектории, то в моменты, когда направление движения не перпендикулярно диагонали швабры, поперечное сечение швабры меньше оптимального. Поэтому, пока мы полностью на ковре, оптимально будет двигать швабру прямолинейно — вычищая полосы шириной в диагональ швабры $\sqrt{c^2 + d^2}$. Выйдя на паркет, мы можем сместиться с одной полосы на другую.



Как направить эти полосы? Построим параллельные линии на расстоянии $\sqrt{c^2 + d^2}$ друг от друга и посмотрим, как относительно них может быть расположен ковёр (первый рисунок). Так или иначе, площадь самого ковра (отмечена жёлтым) замести придётся — неоптимальная трата времени будет происходить на концах этих полос, из-за того, что полосы могут обрезаться наискосок (из-за чего часть швабры будет протирать паркет вместо ковра, уменьшая КПД), а также из-за необходимости вывести швабру на изначальную позицию. Такие места с излишками отмечены оранжевым.

Наилучшим расположением полос будет такое, при котором самих полос получится меньше всего. Значит, лучше всего направить полосы параллельно длинной стороне прямоугольника. Константы A, B таковы, что в прямоугольник уложится целое число полос. Швабра, соответственно, будет повернута под некоторым углом к ковру.

Можно ли как-то оптимизировать выход на полосу, или сход с полосы? Если полосы перпендикулярны стороне ковра — лучше всего просто двигаться прямолинейно. Например, (см. второй рисунок) точке Q , вершине швабры, нужно добраться до точки P , исходной позиции. При прямолинейном движении Q будет двигаться по P по прямой — и это кратчайшее расстояние от P до границы ковра. Пересечь границу ковра и дойти до P вершине швабры всё равно придётся — и любой другой путь окажется длиннее. Расстояние, которое мы проходим при каждом заходе/выходе равно высоте, проведённой из P на диагональ швабры. Высота равна $\frac{cd}{\sqrt{c^2 + d^2}}$.

Не будет ли экономнее сменять полосы, вовсе не выходя на паркет? Нет, не будет. Сдвиг на соседнюю полосу требует расстояния $\sqrt{c^2 + d^2}$, и оно больше, чем занимает сход со старой полосы и выход на новую, то есть $\frac{2cd}{\sqrt{c^2 + d^2}}$.

Значит, число полос равно $\frac{B}{\sqrt{c^2 + d^2}}$, каждой полосе соответствует длина $A + 2\frac{cd}{\sqrt{c^2 + d^2}}$, итоговое

время равно

$$t = \frac{1}{v} \frac{B}{\sqrt{c^2 + d^2}} \left(A + 2 \frac{cd}{\sqrt{c^2 + d^2}} \right)$$

В-2 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 340 на 290 прямоугольной шваброй размерами 21 на 20. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна $\frac{100}{29}$. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

Ответ: 1070

В-3 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 110 на 85 прямоугольной шваброй размерами 15 на 8. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна $\frac{10}{17}$. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

Ответ: 1055

В-4 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 250 на 170 прямоугольной шваброй размерами 30 на 16. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна $\frac{50}{17}$. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

Ответ: 473

В-5 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 420 на 290 прямоугольной шваброй размерами 42 на 40. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна $\frac{100}{29}$. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

Ответ: 693

В-6 Мы протираем лежащий на паркете прямоугольный ковёр размерами 250 на 200 прямоугольной шваброй размерами 20 на 15. Первоначально швабра помещается на паркет, полностью за пределами ковра. После этого швабру нельзя поворачивать, и нельзя отрывать от пола, но можно двигать по любой траектории — ковёр нужно протереть одним движением, причём швабра должна закончить своё движение на паркете. Паркет гладкий, поэтому по нему швабра скользит мгновенно, с «бесконечно большой» скоростью, но как только прямоугольник швабры хотя бы одной своей точкой задевает ковёр — скорость движения становится равна 4. Найдите наименьшее время, за которое можно протереть ковёр целиком.

Ответ: 548

В-1 Дано: $x^5y^4 - x^4y^5 = 8$, $x^3y^3(x^3 - y^3) = 25$. Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения $x^3y^3 - x^3 + y^3$ в виде дроби $\frac{n}{m}$, где n, m — натуральные числа, НОД $(n, m) = 1$. Найдите $2n + 3m$

Ответ: 102

Решение. Разложим на множители данные уравнения:

$$x^4y^4(x - y) = 8,$$

$$x^3y^3(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 25.$$

Поделив второе уравнение на первое (очевидно, $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$), получим

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{25}{8},$$

откуда $\frac{(x-y)^2}{xy} = \frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8}$.

Так как из первого уравнения $x - y = \frac{2^3}{(xy)^4}$, то $(xy)^9 = 8 \cdot 2^6$, то есть $(xy)^3 = 8$. Поэтому $x^3 - y^3 = \frac{25}{8}$.

Значит, выражение $x^3y^3 - x^3 + y^3$ при данных условиях принимает постоянное значение и равно $8 - \frac{25}{8} = \frac{39}{8}$. Поэтому $n = 39, m = 8, 2n + 3m = 102$.

В-2 Дано: $x^5y^4 - x^4y^5 = 64$, $x^3y^3(x^3 - y^3) = 200$. Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения $x^3y^3 - x^3 + y^3$ в виде дроби $\frac{n}{m}$, где n, m — натуральные числа, НОД $(n, m) = 1$. Найдите $2n - 3m$

Ответ: 194

В-3 Дано: $x^5y^4 - x^4y^5 = 8$, $x^3y^3(x^3 - y^3) = 25$. Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения $x^3y^3 - x^3 + y^3$ в виде дроби $\frac{n}{m}$, где n, m — натуральные числа, НОД $(n, m) = 1$. Найдите $2n - 3m$

Ответ: 54

В-4 Дано: $x^5y^4 - x^4y^5 = 64$, $x^3y^3(x^3 - y^3) = 200$. Запишем наибольшее возможное рациональное значение выражения $x^3y^3 - x^3 + y^3$ в виде дроби $\frac{n}{m}$, где n, m — натуральные числа, НОД $(n, m) = 1$. Найдите $2n + m$

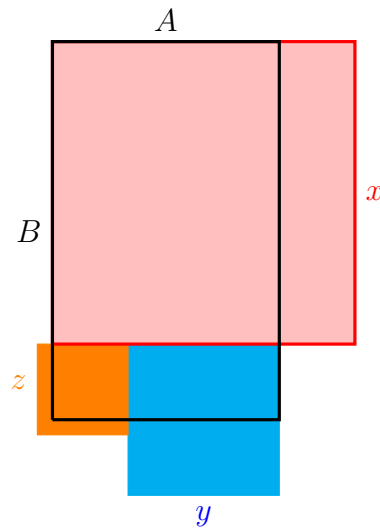
Ответ: 210

Задача 8

В-1 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 55 на 100. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 6050

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть размеры пятна равны A, B , где $B > A$. Решение задачи с конкретно заданными коэффициентами, конечно, будет проще.



Обозначим длины сторон квадратов как x, y, z , и выпишем условия на эти величины. Так как углов у пятна 4, одному из квадратов (пусть это квадрат со стороной x) придётся накрыть сразу два угла. Отсюда следует, что

$$A \leq x \leq B.$$

Длина меньше A недостаточна. Длина больше B заведомо избыточна. Можно считать, что угол квадрата x совпадает с углом прямоугольника, так как располагать его иначе заведомо невыгодно.

Может быть, мы обошлись одним квадратом — при $x = B, y = 0, z = 0$ весь прямоугольник накрыт. Учтём этот случай как исключение.

При $x < B$ после наложения квадрата x остаётся прямоугольник, со сторонами $(A, B - x)$, который нужно накрыть двумя квадратами y, z . Чтобы у квадратов хватило длины и ширины для накрывания, нужны такие условия:

$$y + z \geq \max(A, B - x), \quad y \geq \min(A, B - x), \quad z \geq \min(A, B - x)$$

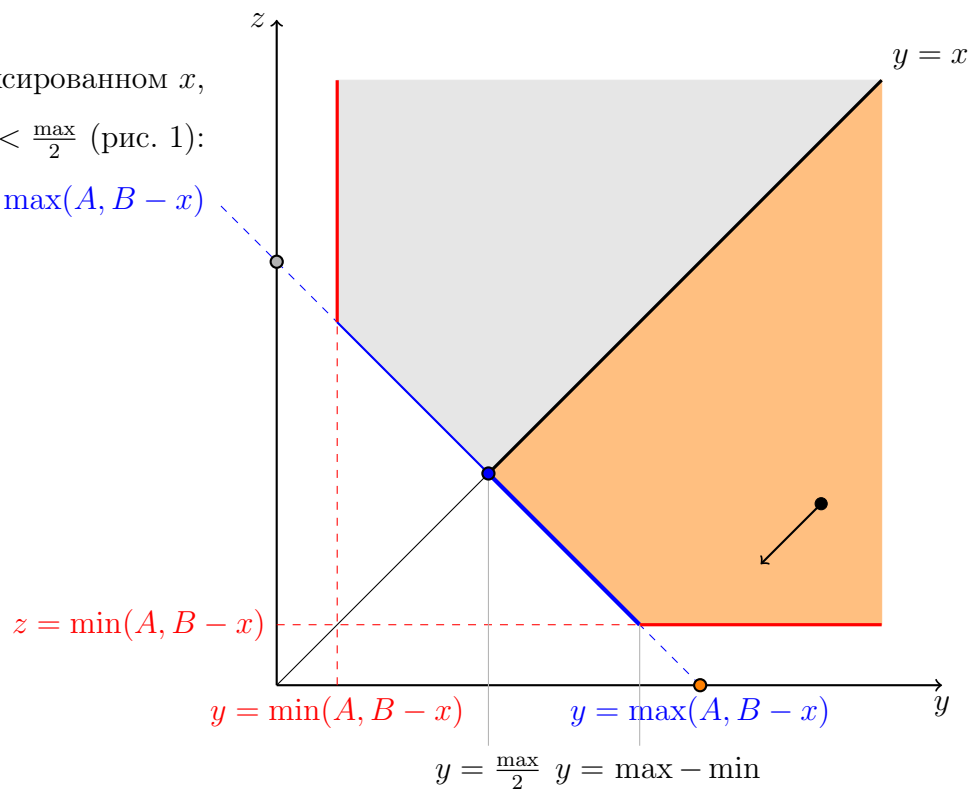
Можно также попробовать обойтись одним квадратом:

$$y = \max(A, B - x), \quad z = 0, \quad (\text{или наоборот}).$$

Далее для краткости иногда вместо $\max(A, B - x)$ будем писать \max , вместо $\min(A, B - x)$ будем писать \min . Нарисуем полученные условия при фиксированном x на плоскости (y, z) . Есть два качественно разных случая:

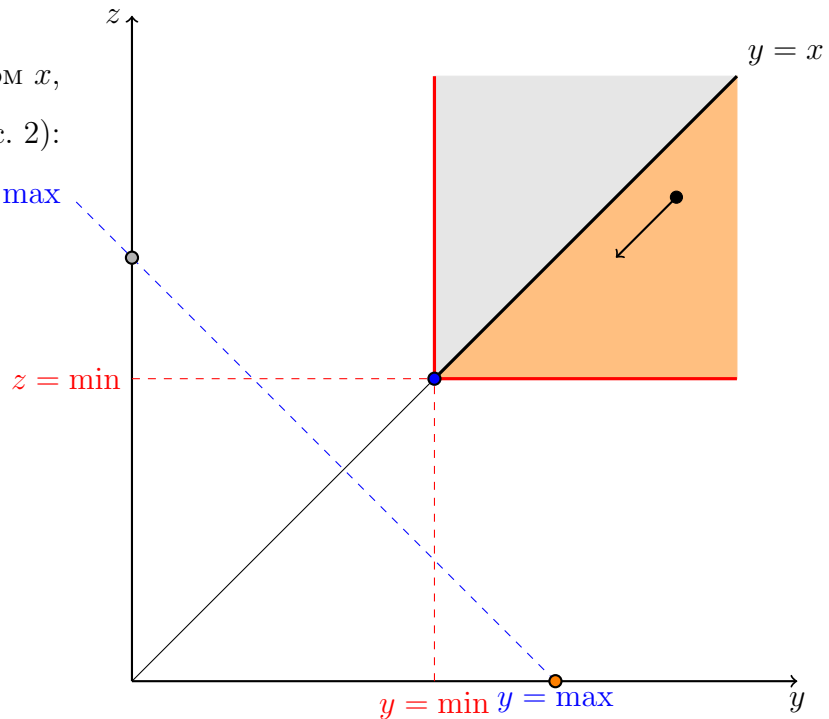
При фиксированном x ,
если $\min < \frac{\max}{2}$ (рис. 1):

$$y + z = \max(A, B - x)$$



При фиксированном x ,
если $\min \geq \frac{\max}{2}$ (рис. 2):

$$y + z = \max$$



Накрыть оставшийся прямоугольник получится только такими y, z , которые находятся в закрашенной области (включая отдельно стоящие точки на осях). Из-за симметричности (неважно, какой из квадратов больше другого) достаточно рассмотреть оранжевую область ($y \geq z$).

Мы ищем минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ при фиксированном x . Если сдвинуться от любой точки (y, z) вниз, или налево, не выходя из отмеченной области — слагаемые уменьшатся, уменьшится и сумма, а возможность накрыть прямоугольник останется.

Поэтому минимум выражения достигается там, где не получится дальше уменьшать y или z . Следовательно, минимум будет либо в отдельно стоящей точке $y = \max, z = 0$, либо на «юго-западной» границе — на рисунке 1 это синий отрезок, $y \in [\frac{\max}{2}, \max - \min], z = \max - y$. На рисунке 2 это просто точка $y = \min, z = \min$.

Найдём, какая из точек «юго-западной» границы (рис. 1) наилучшая. Общая площадь квадратов равна

$$S = x^2 + y^2 + (\max - y)^2, \quad y \in \left[\frac{\max}{2}, \max - \min\right].$$

По переменной y функция $S(y)$ представляет собой квадратный трехчлен, ее точка минимума находится в вершине параболы и равна $y = \frac{\max}{2}$. Значит, $z = \frac{\max}{2}$.

Перечислим кандидатов на минимальность:

- (Отдельная точка, при любых условиях): $y = \max, z = 0, \quad S(x) = x^2 + \max^2$;
- (При $\min < \frac{\max}{2}$): $y = \frac{\max}{2}, z = \frac{\max}{2}, \quad S(x) = x^2 + \frac{\max^2}{2}$;
- (При $\min \geq \frac{\max}{2}$): $y = \min, z = \min, \quad S(x) = x^2 + 2 \min^2$;

Найдём, кто из них меньше. При $\min < \frac{\max}{2}$ сравниваются $S(x) = x^2 + \max^2$ и $S(x) = x^2 + \frac{\max^2}{2}$ — понятно, кто победил.

При $\min \geq \frac{\max}{2}$ сравниваются $S(x) = x^2 + \max^2$ и $S(x) = x^2 + 2 \min^2$. Кто из них меньше? Для этого надо сравнить \max^2 и $2 \min^2$, то есть \max против $\sqrt{2} \min$. Значит, наименьшие варианты будут располагаться так:

- (При $0 < \min < \frac{\max}{2}$): $y = \frac{\max}{2}, z = \frac{\max}{2}, \quad S(x) = x^2 + \frac{\max^2}{2}$;
- (При $\frac{\max}{2} \leq \min \leq \frac{\sqrt{2} \max}{2}$): $y = \min, z = \min, \quad S(x) = x^2 + 2 \min^2$;
- (При $\frac{\sqrt{2} \max}{2} < \min < \max$): $y = \max, z = 0, \quad S(x) = x^2 + \max^2$;

Теперь, чтобы найти минимум по x , придётся раскрыть $\max(A, B - x)$ и $\min(A, B - x)$. Буквой x_m будем обозначать точку, где находится вершина параболы $S(x)$, а попадает ли x_m в область определения — выясним позже:

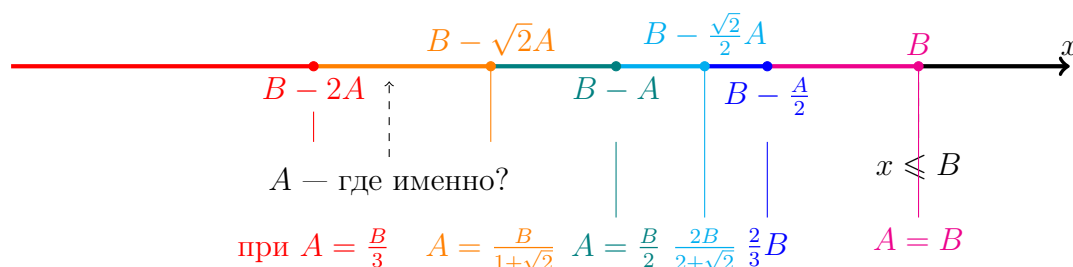
При $x < B - A$ максимумом будет $B - x$, минимумом будет A . Подставляем:

- (При $0 < A < \frac{B-x}{2}$, т.е. $x < B - 2A$): $y = \frac{B-x}{2}, z = \frac{B-x}{2}, \quad S(x) = x^2 + \frac{(B-x)^2}{2}, \quad x_m = \frac{B}{3}$;
- (При $\frac{B-x}{2} \leq A \leq \frac{\sqrt{2}(B-x)}{2}$, т.е. $B - 2A \leq x \leq B - \sqrt{2}A$): $y = A, z = A, \quad S(x) = x^2 + 2A^2, \quad x_m = 0$;
- (При $\frac{\sqrt{2}(B-x)}{2} < A < B - x$, т.е. $B - \sqrt{2}A < x < B - A$): $y = B - x, z = 0, \quad S(x) = x^2 + (B - x)^2, \quad x_m = \frac{B}{2}$.

При $B - A \leq x$ максимумом будет A , минимумом будет $B - x$. Подставляем:

- (При $\frac{\sqrt{2}A}{2} < B - x < A$, т.е. $B - A < x < B - \frac{\sqrt{2}}{2}A$): $y = A, z = 0, \quad S(x) = x^2 + A^2, \quad x_m = 0$;
- (При $\frac{A}{2} \leq B - x \leq \frac{\sqrt{2}A}{2}$, т.е. $B - \frac{\sqrt{2}}{2}A \leq x \leq B - \frac{A}{2}$): $y = B - x, z = B - x, \quad S(x) = x^2 + 2(B - x)^2, \quad x_m = \frac{2B}{3}$;
- (При $0 < B - x < \frac{A}{2}$, т.е. $B - \frac{A}{2} < x < B$): $y = \frac{A}{2}, z = \frac{A}{2}, \quad S(x) = x^2 + \frac{A^2}{2}, \quad x_m = 0$;

Отмеченные цветом области без пропусков заполняют пространство левее точки B — однако для поиска минимума нужно учесть, что левая граница области определения x , точка A , может оказаться в любой из этих цветных областей (куда она попадёт — зависит от пропорции A и B).



Посмотрим, какие минимумы будут получаться при разных A . Чем меньше A — тем больше цветных отрезков предстоит рассмотреть. Разноцветными S будем обозначать минимумы, получаемые на соответствующих отрезках. Соответственно, среди них нужно выбрать наименьший. К ним добавляется вариант, когда прямоугольник накрывается всего одним квадратом — $S = B^2$, при $x = B, y = 0, z = 0$.

- (При $\frac{2}{3}B < A \leq B$): Минимум будет достигаться на левом конце области определения, то есть при A . $S = \frac{3}{2}A^2$; $S = B^2$.
- (При $\frac{2B}{2+\sqrt{2}} < A \leq \frac{2}{3}B$): S изменится, так как теперь левым концом области определения для него будет $B - \frac{A}{2}$. $S = \frac{3}{4}A^2 - AB + B^2$. Про $x_m = \frac{2}{3}B$ можно выяснить следующее — при $A < \frac{2}{3}B$ точка x_m будет лежать левее $B - \frac{A}{2}$. Точка x_m лежит правее A . За левую границу синего отрезка x_m выйдет тогда, когда $A < \frac{\sqrt{2}}{3}B$. До того момента $S = \frac{2}{3}B^2$. $S = B^2$.
- (При $\frac{B}{2} < A \leq \frac{2B}{2+\sqrt{2}}$): Левая граница $x = A$ лежит внутри голубого отрезка, поэтому $S = 2A^2$. $S = \frac{2}{3}B^2$. $S = \frac{3}{4}A^2 - AB + B^2$. $S = B^2$.
- (При $\frac{B}{1+\sqrt{2}} < A \leq \frac{B}{2}$): При таких значениях A локальный минимум $x_m = \frac{B}{2}$ будет находиться внутри зелёного отрезка, поэтому $S = \frac{B^2}{2}$. $S = 2A^2 - 2AB + B^2$. $S = \frac{2}{3}B^2$ или больше. $S = \frac{3}{4}A^2 - AB + B^2$. $S = B^2$.
- (При $\frac{B}{3} < A \leq \frac{B}{1+\sqrt{2}}$): Левая граница $x = A$ лежит внутри рыжего отрезка, поэтому $S = 3A^2$. $S = \frac{B^2}{2}$ пока $\frac{B}{2\sqrt{2}} < A$, потом увеличивается до $S = 4A^2 - 2\sqrt{2}AB + B^2$. $S = 2A^2 - 2AB + B^2$. $S > \frac{2}{3}B^2$. $S = \frac{3}{4}A^2 - AB + B^2$. $S = B^2$.
- (При $0 < A \leq \frac{B}{3}$): Локальный минимум $x_m = \frac{B}{3}$ будет в области определения, поэтому $S = \frac{B^2}{3}$. $S = 6A^2 - 4AB + B^2$. $S = 4A^2 - 2\sqrt{2}AB + B^2$. $S = 2A^2 - 2AB + B^2$. $S > \frac{2}{3}B^2$. $S = \frac{3}{4}A^2 - AB + B^2$. $S = B^2$.

Варианты:

- $A = 55 \mid B = 100 : x, y, z = 55, 55, 0 \mid S = 6050$
- $A = 62 \mid B = 99 : x, y, z = 66, 33, 33 \mid S = 6534$
- $A = 78 \mid B = 100 : x, y, z = 78, 39, 39 \mid S = 9126$
- $A = 86 \mid B = 100 : x, y, z = 100, 0, 0 \mid S = 10000$
- $A = 25 \mid B = 99 : x, y, z = 33, 33, 33 \mid S = 3267$
- $A = 41 \mid B = 100 : x, y, z = 50, 50, 0 \mid S = 5000$

В-2 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 62 на 99. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 6534

В-3 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 78 на 100. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно

взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 9126

В-4 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 86 на 100. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 10000

В-5 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 25 на 99. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 3267

В-6 На полу в центре большой комнаты осталось прямоугольное пятно размером 41 на 100. Его накрывают тремя (или менее) квадратными ковриками произвольных размеров. Можно накладывать ковры друг на друга и вылезать за пределы пятна, но стороны квадратов должны быть параллельны или перпендикулярны сторонам пятна. Какие длины сторон ковриков нужно взять, чтобы получилось накрыть пятно полностью, но при этом суммарная площадь квадратов была наименьшей? В ответе укажите суммарную площадь квадратов.

Ответ: 5000
